高３　ハイレベル数学ⅠAⅡBを受講する皆さんへ

ようこそ，後期講座へ.
前期講座で収録できなかった単元別の問題のうち，「数列」「高次方程式」「証明」「整数問題」がこの後期講座に収録されています．じっくり取り組んでください.

そしてテキストの後半部分では，「総合問題」と題してみなさんに実践（実戦）練習を積んでいただきます．単元別学習と各自の練習で身につけた知識を確かなものにし，さらに応用力を高めるための問題が掲載されています．様々な局面が絡み合います．またどんな展開になるか事前に予告はしません．それが入試問題の醍醐味です．どこかで見たことのあるものについては，その攻略法を確かめながら進み，そして初めて出会う局面に関しては，それをどう切り拓くかをじっくり考え，そして実行する．入試本番でみなさんが問題を目の前にして行うべきこと，それを「総合問題」を通じて養ってください.

この後期講座を一通りやれば，「問題を通じて学ぶ力」があなたのものになるでしょう．さらなる力をつけるために，より上のレベルの講座に進むのもよいでしょう．また，入試問題集や大学の過去問を解き，解説と照らし合わせ，数学力の幅をさらに広げていきましょう.

前期講座でも触れましたが，「人から人へ」．それは時代がどんなに進歩しても変わることがありません．真剣に動画を視聴してください．一緒に数学の世界を紐解いていきましょう.
さぁ，そろそろ時間です．まずはしっかりと「予習」し，自分の力の到達具合を確認しておいてください．いつでも，どこでも，何度でも．『スタディサプリ』は君たちと共にあります.

山内　恵介

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜後期　目次＞

第 25 講　数列(3)
第 26 講　数列(4)
第 27 講　高次方程式
第 28 講　証明(1)
第 29 講　証明(2)
第 30 講　整数問題(1)
第 31 講　整数問題(2)
第 32 講　整数問題(3)
第 33 講　総合問題(1)
第 34 講　総合問題(2)
第 35 講　総合問題(3)
第 36 講　総合問題(4)
第 37 講　総合問題(5)
第 38 講　総合問題(6)
第 39 講　総合問題(7)
第 40 講　総合問題(8)
第 41 講　総合問題(9)
第 42 講　総合問題(10)
第 43 講　総合問題(11)
第 44 講　総合問題(12)
第 45 講　総合問題(13)
第 46 講　総合問題(14)
第 47 講　総合問題(15)
第 48 講　総合問題(16)

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜講座の受講の仕方＞

①　予習について

すべての講は「講義問題」３問で構成されています．まずは何も見ないで問題をノートまたはルーズリーフに解いてみましょう．問題をとらえる自分の力がどこまで養われているかがわかります．

ここでは必ずしも答案形式にこだわる必要はありません．最後まで解けないことも多いかもしれません．それでも，いろんな可能性を追ってみましょう．

ちなみに１問にかけてよい時間はおよそ 15 分〜20 分（[1] [2] に分かれている場合はそれぞれおよそ 10 分）です．３問でおよそ１時間．数学に本気で向き合う時間です．

②　講義について

予習をすることで自分の見るべきポイントが押さえられた状態，これが講義を受ける前に必要な準備です．それができている状態で授業を見て，先生がこの問題を通じて何を伝えたいのかを感じ取ってください．問題が掲載されているページは全て見開きの構成となっており，余白（「Note」欄）がふんだんに用意されています．ここには何でも「自由」に書いて残すことができます．「自由」とはどういうことか．それは，このスペースに画面上の黒板に書かれたことを「書き写すのみ」に留まることは厳禁，ということです．授業時間は限られていますから，先生は全てを黒板に書くことはしていません．よって，授業を聞き，先生が話したことや自分なりに感じ取ったことを記しておくべきなのです．きれいにまとめても誰も見てくれませんよ．あくまで「Note」＝「記録」です．後から見て自分だけがわかる程度でいいのです．

これまでの人生で書く速度を速くする努力をしてこなかった人へ．この講座はいつでも止めたり戻ったりできます．もちろん，聞きながら書くという訓練はこれからでも遅くありませんよ．また，止められるからといって「考えすぎ」は逆に厳禁です．あなた方に残された時間は限られています．勉強は数学だけじゃないでしょう？　大枠をとらえた上で，細かいところに後からこだわる姿勢も大事ですよ．

③　復習について　その１

まずは問題によって語られた「ストーリー」を，テキストの問題を見ながらもう一度頭に描いてみましょう．もし思い出せない場面があったら「Note 欄」を見てみましょう．そしてそこで描いた世界観を元に，次に自分で実際に問題を別の紙や復習用ノートに解いてみましょう．予習と異なり，ここでは計算も含め実際に丁寧に記述してみてください．もし全然歯がたたない場合は，もう一度講座を視聴することをお勧めします．

もちろん数学という科目の特性上，あなたの技術力の不足などにより途中で止まってしまうかもしれません．また，あなたの想いをどういう記述で表現してよいかわからない場合もあるかもしれません．安心してください．すべての問題に「解答例」がついています．必要に応じ

©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

て参考にしてください．

講義問題の復習をこのように欠かすことなく行い，解答を自分で書き上げることができた時が，先生から得たものが自分のものになった瞬間です．こうして書き上げた答案を，テキストと一緒に保存しておきましょう．

また１回の復習で納得のいくものが書けないケースもあるかと思います．そういった場合は，時間をおいて今一度問題を解き直すことをお勧めします．チャンスは「空き時間」「隙間時間」です．一度自分で取り組んだことは，次に解くときは確実に速度と正確性が上がります．それを実感することも成長の糧となりましょう．

④　復習について　その２

③が終わったら，新たな問題にチャレンジしたくなるでしょう．「練習問題」が各講１題ずつ用意してあります．講義の問題に関連する問題もあれば，発展的な内容もあります．また問題によって難易度も様々です．

解き終えたら，「解答」を見て自分の到達具合をチェックしてみましょう．この「練習問題」もまた，みなさんの成長のために厳選した問題です．より理解を深めていただきたく思います．

以上を確実に繰り返すことにより，確実に「自分で考える」領域に近づくことができます．入試を想定すると，最終的には自分で答案を作り上げる必要があります．授業を受けるだけでは，「受けっぱなし」に終わることもあるでしょう．また，記憶とともに忘れ去られてしまうことも．それを防ぐためのこのサイクルが大切です．もちろん，授業は何度でも再生可能です．後から改めて見るとその意味がわかった，という声もよく耳にします．決して短くはないこの道のり．１日１日，一歩一歩，焦らず，確実に進んで行きましょう．

最後に．この講義と同時並行で進める日々の自主学習においては，その理解を深めるための「解説」が重要です．例えば「授業」や「解答集」がそれに当たります．とくに「詳細な解答」，つまり答えに行き着く「プロセス」を自分の解答と照らし合わせる作業が欠かせません．ですから「最後の答」しかない問題集やプリントではお話になりません．自分で考えれば必ず答えにたどり着く！とおっしゃる先生もいますが，「知識の欠如」「時間の制約」「経験不足」「他教科とのバランス」が考慮されておらず，「自分ができる（できてきた）ことは他人もできるはず」という無責任な発言とも言えましょう．受験勉強に求められるのは，「時間対効果」です．

よい道筋を参考に，自分で切り開く時の「道標」としながら自主学習を進めて行きましょう．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 25 講　数列(3)

1　数列 $\{a_n\}$：1，$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{1}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{2}$，$\frac{3}{1}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{2}$，$\frac{4}{1}$，…… を次のような群に分け，第 m 群には m 個の数が入るようにする．

$$\frac{1}{1}\left|\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\right|\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\left|\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\right|,\ \cdots\cdots,\ \left|\frac{1}{m},\ \frac{2}{m-1},\ \cdots\cdots,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m}{1}\right|,\ \cdots\cdots$$

(1)　数列 $\{a_n\}$ において $\frac{q}{p}$ は第何項か．ただし，$\frac{q}{p}$ は，例えば $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ のように約分しないものとする．

(2)　a_{100} を求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

2　k を 0 以上の整数とし，$\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{2}\leqq k$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする．a_k を k の式で表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

3　自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2)　自然数 m について，$S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{m^2}$ を，m を用いて表せ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第25講　数列(3)

数列 $\{a_n\}$：$\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{5}$, …… について次の問いに答えよ.

(1)　$\frac{35}{49}$ は数列 $\{a_n\}$ の第 **アイウエ** 項である.

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第1005項までの和は **オカキ** である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

＜ Note ＞

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

テキスト解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 25 講　数列(3)

1　数列 $\{a_n\}$：$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1},\ \cdots\cdots$ を次のような群に分け，第 m 群には m 個の数が入るようにする．

$$\frac{1}{1}\Big|\frac{1}{2},\ \frac{2}{1}\Big|\frac{1}{3},\ \frac{2}{2},\ \frac{3}{1}\Big|\frac{1}{4},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{1}\Big|,\ \cdots\cdots,\ \Big|\frac{1}{m},\ \frac{2}{m-1},\ \cdots\cdots,\ \frac{m-1}{2},\ \frac{m}{1}\Big|,\ \cdots\cdots$$

(1)　数列 $\{a_n\}$ において $\frac{q}{p}$ は第何項か．ただし，$\frac{q}{p}$ は，例えば $\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$ のように約分しないものとする．

(2)　a_{100} を求めよ．

第 m 群の各項は，分母と分子の和が $m+1$ である．

また，第 m 群の末項は，数列 $\{a_n\}$ の第 $1+2+3+\cdots\cdots+m=\frac{1}{2}m(m+1)$（項）である．

(1)　$\frac{q}{p}$ は第 $(p+q-1)$ 群の q 番目の項である．

$p+q\geqq 3$ のとき，第 $(p+q-2)$ 群までに　$\frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)$ 項ある．

したがって　$\frac{q}{p}$ は　**第 $\boldsymbol{\frac{1}{2}(p+q-2)(p+q-1)+q}$ 項**である（$p=q=1$ のときもこれでよい）．

(2)　a_{100} が第 m 群に属するとすると

$$\frac{1}{2}(m-1)m<100\leqq\frac{1}{2}m(m+1)\qquad (m-1)m<200\leqq m(m+1)$$

$13\times14=182,\ 14\times15=210$　より，これを満たす m は $m=14$

第 13 群までに　$\frac{1}{2}\cdot13\cdot14=91$（項）ある．

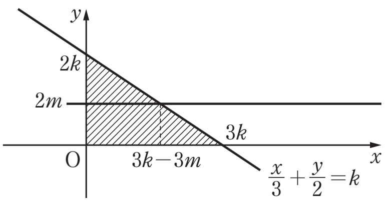
よって　a_{100} は第 14 群の　$100-91=9$（番目）の項である．

したがって　$a_{100}=\frac{9}{15-9}=\boldsymbol{\frac{9}{6}}$

2　k を 0 以上の整数とし，$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq k$ を満たす 0 以上の整数 x，y の組 $(x,\ y)$ の個数を a_k とする．a_k を k の式で表せ．

$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}\leqq k,\ x\geqq0,\ y\geqq0$ を満たす領域を D とし，領域 D 内で $y=l$（$0\leqq l\leqq 2k$，l は整数）にある格子点の個数を b_l とする．

以下，m を整数とする．



(i)　$l=2m$（$0\leqq m\leqq k$）のとき

$b_l=(3k-3m)-0+1$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

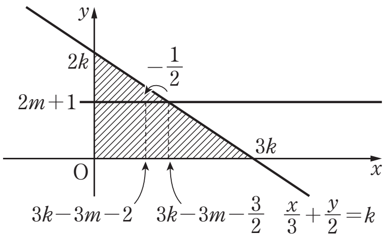
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

$=-3m+(3k+1)$

(ii)　$l=2m+1$　$(0\leqq m\leqq k-1)$　のとき

$b_l=(3k-3m-2)-0+1$

$=-3m+(3k-1)$



よって　$a_k=\sum_{l=0}^{2k} b_l$

$=\sum_{m=0}^{k}\{-3m+(3k+1)\}+\sum_{m=0}^{k-1}\{-3m+(3k-1)\}$

$=\{(3k+1)+(3k-2)+\cdots\cdots+1\}+\{(3k-1)+(3k-4)+\cdots\cdots+2\}$

$=\frac{k+1}{2}(3k+1+1)+\frac{k}{2}(3k-1+2)$

$=\boldsymbol{3k^2+3k+1}$

3　自然数 n について，a_n を $\sqrt{n}$ 以下の整数のうち最大のものとするとき，次の各問いに答えよ．

(1)　a_1，a_2，a_3，a_4 の値を求めよ．

(2)　自然数 m について，$S=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_{m^2}$ を，m を用いて表せ．

---

(1)　$\sqrt{1}=1$ 以下の最大の整数は 1　　よって，$\boldsymbol{a_1=1}$

$\sqrt{2}=1.41\cdots$ 以下の最大の整数は 1　　よって，$\boldsymbol{a_2=1}$

$\sqrt{3}=1.73\cdots$ 以下の最大の整数は 1　　よって，$\boldsymbol{a_3=1}$

$\sqrt{4}=2$ 以下の最大の整数は 2　　よって，$\boldsymbol{a_4=2}$

(2)　$a_n=k$ となるのは　$n=k^2$，k^2+1，k^2+2，……，$(k+1)^2-1$　の

$(k+1)^2-1-k^2+1=2k+1$ (個) である．

また，$a_{m^2}=m$ であり，a_{m^2} は $a_n=m$ となる最初の項である．

よって

$$S=\sum_{k=1}^{m-1}k(2k+1)+m=2\cdot\frac{1}{6}(m-1)m(2m-1)+\frac{1}{2}(m-1)m+m=\boldsymbol{\frac{m(4m^2-3m+5)}{6}}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

練習問題解答

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

第 25 講　数列(3)

数列 $\{a_n\}$: $\frac{1}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{3}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{4}$, $\frac{7}{4}$, $\frac{1}{5}$, …… について次の問いに答えよ.

(1)　$\frac{35}{49}$ は数列 $\{a_n\}$ の第 **アイウエ** 項である.

(2)　数列 $\{a_n\}$ の初項から第 1005 項までの和は **オカキ** である.

分母が n である分数が第 n 群に属するとする.

$$\frac{1}{1},\ \Big|\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \Big|\frac{1}{3},\ \frac{3}{3},\ \frac{5}{3},\ \Big|\frac{1}{4},\ \frac{3}{4},\ \frac{5}{4},\ \frac{7}{4},\ \Big|\frac{1}{5}\ \cdots\cdots$$

(1)　$35=2\cdot18-1$ より　$\frac{35}{49}$ は第 49 群の 18 番目の数である.

初項から第 n 群の末項までの項数は　$1+2+3+\cdots\cdots+n=\frac{1}{2}n(n+1)$（項）より

第 48 群の末項までの項数は　$\frac{1}{2}\cdot48\cdot49=1176$

よって $\frac{35}{49}$ は第 $1176+18=\mathbf{1194}$（項）　である.

(2)　第 1005 項が第 n 群に属するとすると

$\frac{1}{2}(n-1)n<1005\leqq\frac{1}{2}n(n+1)$

$(n-1)n<2010\leqq n(n+1)$

$44\cdot45=1980$,　$45\cdot46=2070$　より　この式を満たす自然数 n は　$n=45$

よって第 1005 項は第 45 群に属する.

初項から第 44 群の末項までの項数は　$\frac{1}{2}\cdot44\cdot45=990$

よって　第 1005 項は，第 45 群の　$1005-990=15$（番目）　の数である.

ここで，第 n 群に属する数の和は

$$\frac{1}{n}+\frac{3}{n}+\frac{5}{n}+\cdots\cdots+\frac{2n-1}{n}$$

$=\frac{1}{n}\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}\{1+(2n-1)\}=\frac{1}{n}\cdot n^2=n$　であることより

求める和は

$$\sum_{k=1}^{44}k+\frac{1}{45}(1+3+5+\cdots\cdots+29)=\frac{1}{2}\cdot44\cdot45+\frac{1}{45}\cdot15^2=\mathbf{995}$$　である.

ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。